INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS

COMUNICACIONES I

PRACTICA No 2 “REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA f(t) USANDO LA SERIE COMPLEJA Y TRIGONOMETRICA DE FOURIER.”

By Richard

FECHA DE REALIZACIÓN: 27-FEB-08

FECHA DE ENTREGA: 05-MAR-08

FUNDAMENTO TEÓRICO.

Serie compleja de Fourier.

La representación de una función periódica como una serie de Fourier, implica que la especificación de sus coeficientes determina unívocamente la función.
En muchas aplicaciones de las series de Fourier, es conveniente expresar estas series en términos de los exponenciales complejos $e^{\pm jn\omega_0 t}$.

Antes de entrar al estudio de la serie de Fourier compleja de una función periódica, hagamos un breve repaso de algunos conceptos básicos y propiedades de los números complejos *C*, que usaremos continuamente en estas secciones.

Los números complejos se definen como:

$$C = \{ a + bi \mid a, b \in \Re \}$$

donde $i^2 = -1$

La forma polar de un número complejo es:

$$z = r\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

donde:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \tfrac{b}{r} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \tfrac{a}{r}$$

Si usamos la identidad de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

entonces la forma polar se abrevia simplemente como $z = re^{i\theta}$.

Tenemos algunas identidades importantes, ya que:

$$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(x) - i\,\mathrm{sen}(x)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,\mathrm{sen}(x)$$

Y por lo tanto obtenemos que,

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \mathrm{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{cases}$$

Como no pretendemos adentrarnos de lleno en el estudio de los números complejos, con esto es suficiente, y en todo caso si algo se necesita mas adelante, lo mencionaremos de manera explícita.

Sea $f(x)$ periódica con período fundamental p, y sea $\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$; por lo tanto la serie de Fourier de $f(x)$ es:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 \cdot x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 \cdot x)$$

Usando las identidades anteriores, tenemos que equivale a:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) + b_n \left(-\tfrac{i}{2}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\omega_0 x}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) + e^{-in\omega_0 x}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)$$

Si definimos:

$$c_0 = a_0 \;;\; c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n) \;\text{ y }\; \overline{c_n} = \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Entonces la serie de Fourier se puede escribir como:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 x} + \overline{c_n} \cdot e^{-in\omega_0 x}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\,dt$$

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n) = \tfrac{1}{2}\left[\frac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt - i\,\frac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\left(\cos(n\omega_0 t) - i\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right)dt$$

$$= \frac{1}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\cdot e^{-in\omega_0 t}\,dt$$

Análogamente se ve que:

$$\overline{c_n} = \frac{1}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t)\cdot e^{in\omega_0 t}\,dt$$

$$\therefore \overline{c_n} = c_{-n}$$

Así pues, la serie de Fourier queda como sigue:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 x} + c_{-n} \cdot e^{-in\omega_0 x}$$

O lo que es lo mismo:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 x} + c_{-n} \cdot e^{-in\omega_0 x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-in\omega_0 x}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega_0 x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot e^{in\omega_0 x}$$

En resumen, hemos podido escribir a la serie de Fourier de *f(x)* como sigue:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\omega_0 x}$$

Delta de Dirac.

La delta de Dirac (inapropiadamente llamada función delta de Dirac) es una distribución introducida por primera vez por el físico inglés Paul Dirac, en tanto que distribución define un funcional en forma de integral sobre un cierto espacio de funciones.
En física la delta de Dirac puede representar la distribución de densidad de una masa unidad concentrada en un punto a. Esta función constituye una aproximación muy útil para funciones picudas y constituye el mismo tipo de abstracción matemática que una carga o masa puntual. En ocasiones se denomina también función de impulso.
Se escribe como: $\delta_{x_0}(x) \equiv \delta(x - x_0)$
Siendo $\delta(x)$ para el caso $x_0 = 0$
Su definición se realiza como la derivada de una función escalón.
Intuitivamente se puede decir que la función δ(x) tiene un valor infinito en x = 0, tiene un valor nulo en cualquier otro punto y su integral para todas las x es uno.
La Delta de Dirac es una "función generalizada" que viene definida por la siguiente fórmula integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\, dx = f(a) \qquad \left[e.g. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1\right]$$

La Delta de Dirac no es una función estrictamente hablando puesto que se puede ver que requeriría tomar valores infinitos, a veces informalmente se define la delta de Dirac como el límite de una sucesión de funciones, que tienda a cero en todo punto del espacio excepto en un punto para el cual divergiría hacia infinito de ahí la "definición convencional" dada por:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases};$$

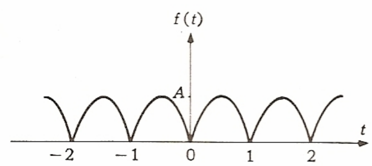
DESARROLLO

Procedimiento:

1.- Aproximar la f(t) de la figura 1

a) Usando la serie compleja

b) Usando la serie Trigonometrica



La función periódica sinusoide rectificada.

Figura 1.

2.- Aproximar la función $\delta(t)$ por:

a) El pulso de gauss $\lim_{t\to 0}\frac{1}{T}e^{\frac{-\pi t^2}{T^2}}$

b) La función triangular $\lim_{t\to 0}\frac{1}{T}\left[1-\frac{|t|}{T}\right]$ $t \lhd |T|$

Análisis

Puesto que el periodo esta dado por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

por consiguiente. La serie compleja de Fourier esta dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt} \qquad (2$$

Los coeficientes c_n son:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{j2\pi nt}dt$$

$$= \int_0^1 Asen\ nt(e^{-j2\pi nt})dt$$

$$= A\int_0^1 \frac{1}{2j}\ (e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\ e)^{-j2\pi nt}dt$$

$$= \frac{A}{2j}\int_0^1 \left[e^{-j\pi(2n-1)t} - e^{-j\pi(2n+1)t} \right] dt$$

$$= \frac{A}{2j}\left[\frac{e^{-j\pi(2n-1)t}}{-j\pi(2n-1)} - \frac{e^{-j\pi(2n+1)t}}{-j\pi(2n-1)} \right]_0^1$$

Dado que $e^{\pm j2\pi n} = 1$ y $e^{+j\pi} = e^{-j\pi}$

$$c_n = \frac{-2A}{\pi(4n^2-1)}$$

Se puede utilizar este resultado cuando n=0; de este modo,

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$= \frac{2A}{\pi}$$

De donde,

$$f(t) = -\frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} e^{j2\pi nt}$$

Reduciendo el resultado anterior a la forma Trigonometrica de la serie de fourier:

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$\therefore\ a_n = 2\,\mathrm{Re}[c_n]$$

$$= -\frac{4A}{\pi(4n^2-1)}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}[c_n] =$$

De donde:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t))$$

$$= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)} \cos(2\pi n t)$$

Para el punto numero dos donde hay que representar la función delta de dirac mediante dos funciones con limites lo que haremos es simplemente mandar a imprimir algunos valores los cuales estén contenidos dentro del limite de cada formula.

Programa en Matlab:

Para el punto No 1 inciso a tenemos:

```
function fourier()

clc;
clear all;
n=input('Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener\n   n=');
%Creamos un vector a intervalos pequeños
x = -pi:0.001:pi;
y=zeros(size(x));
%creamos un vector del tamaño de x
s = zeros(size(x));
%hacemos un ciclo de sumas sucesivas
for k=1:n
z=i*k*2*pi*x;
s=s+(1/((4*(k^2))-1))*real(exp(z));
end
s = ((2)/pi)-(4/pi)*s;
plot(x, s, 'r',x,y,'black');

title('Series de Fourier');
disp('Fin del programa Fourier')
```

Para el punto No 1 inciso b tenemos:

```
function fourier()
clc;
clear all;
n=input('Introduce el numero de coeficientes con los que deseas aproximar\n   n=');
%Creamos un vector a intervalos pequeños
x = -pi:0.001:pi;
y=zeros(size(x));
%creamos un vector del tamaño de x
s = zeros(size(x));
%hacemos un ciclo de sumas sucesivas
for k=1:n
s=s+(1/((4*(k^2))-1))*cos(2*pi*k*x);
end
s = ((2)/pi)-(4/pi)*s;
plot(x, s, 'r',x,y,'black');
title('Series de Fourier');
disp('Fin del programa Fourier')
```

Para el punto No 2 inciso a tenemos:

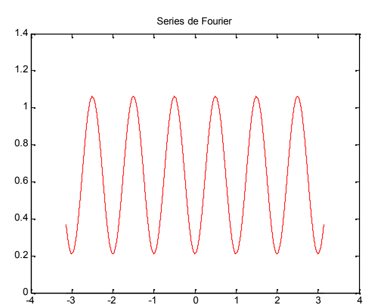
```
function delta()
clc;
clear all;
disp('Gráfica del pulso de la delta de dirac mediante el pulso de Gauss\n\n')
T=input('Introduce el valor de T que deseas usar\n    T=');
x = -1:.001:1;
s = zeros(size(x));
s =exp((-pi*(x.^2))/(T^2));
s=(1/T)*s;
% impresión de la gráfica
plot(x,s,'r');
title('Delta de Dirac mediante Pulso de Gauss');
% Fin del programa Delta de Dirac
```

Para el punto No 2 inciso b tenemos:

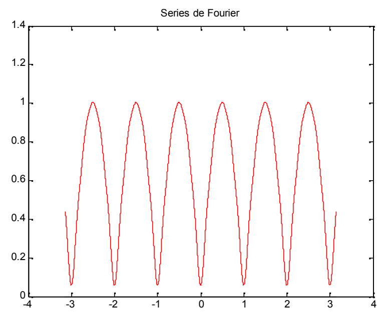
```
function delta()

clc;
clear all;
disp('Gráfica del pulso de la delta de dirac mediante funcion triangular')
T=input('Introduce el valor de T que deseas usar\n    T=');
t = -T:.00001:T;
s = zeros(size(t));
s=(1-(abs(t)/T));
s=(1/T)*s;
% impresión de la gráfica
plot(t,s,'r');
title('Delta de Dirac mediante la funcion triangular');
% Fin del programa Delta de Dirac
```

RESULTADOS.

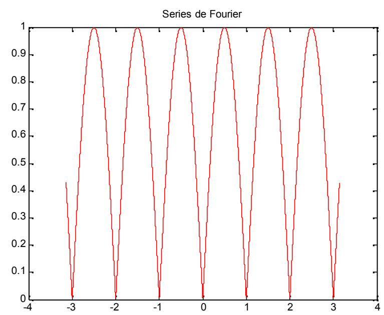
Para el punto No 1 inciso a tenemos:
Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
  n=1
Fin del programa Fourier



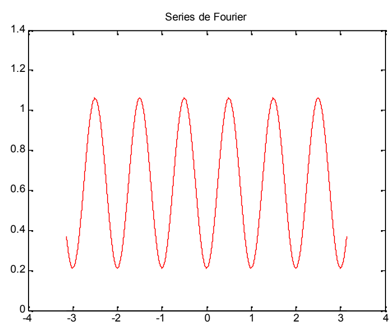
Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
  n=5
Fin del programa Fourier



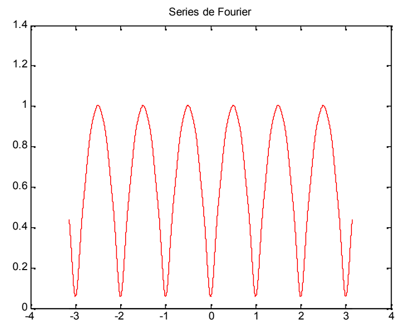
Introduce el numero de coeficientes que deseas obtener
  n=50
Fin del programa Fourier



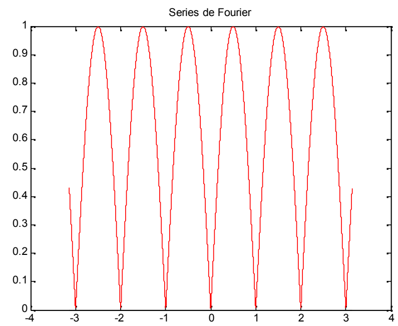
Introduce el numero de coeficientes con los que deseas aproximar
  n=1
Fin del programa Fourier



Introduce el numero de coeficientes con los que deseas aproximar
  n=5
Fin del programa Fourier

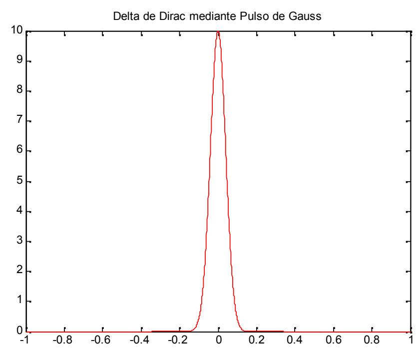


Introduce el numero de coeficientes con los que deseas aproximar
  n=50
Fin del programa Fourier

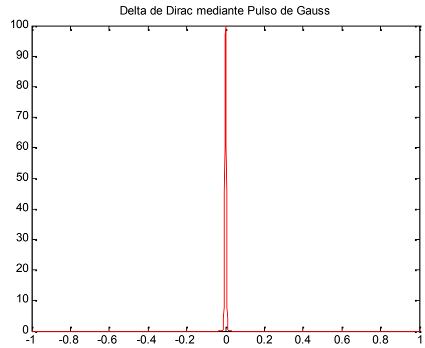


Los resultados con distintos valores de T para el ejercicio del punto No 2 son:

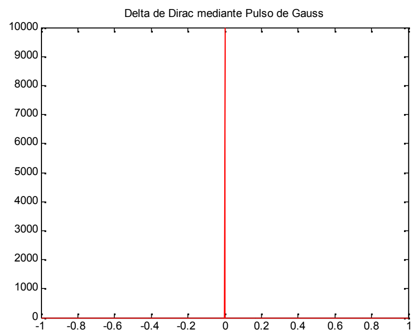
Gráfica del pulso de la delta de dirac mediante el pulso de Gauss\n\n
Introduce el valor de T que deseas usar
   T=.1



Gráfica del pulso de la delta de dirac mediante el pulso de Gauss\n\n
Introduce el valor de T que deseas usar
   T=.01

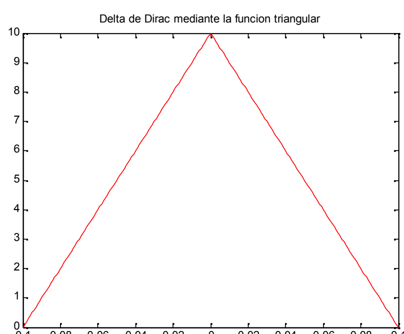


Gráfica del pulso de la delta de dirac mediante el pulso de Gauss\n\n
Introduce el valor de T que deseas usar
T=.0001

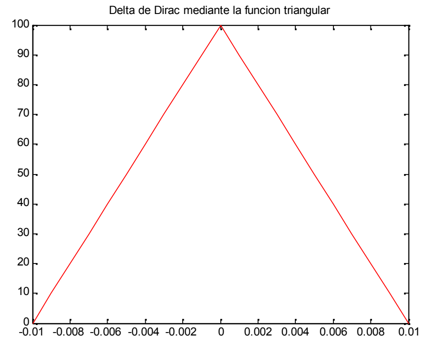


Para el punto No 2 inciso b tenemos los siguientes resultados para distintos valores de T que son:

Gráfica del pulso de la delta de dirac mediante funcion triangular
Introduce el valor de T que deseas usar
T=.1



Gráfica del pulso de la delta de dirac mediante funcion triangular
Introduce el valor de T que deseas usar
T=.01



CONCLUSIONES.

Los que se encontró en esta practica es que tanto como la serie compleja de Fourier como la serie geométrica se aproximan con la misma exactitud a la función f(t) pero que a veces como se menciona en la teoría es mas practico usar la serie compleja, además de que los cálculos para obtener los coeficientes de una serie compleja son menos que los de una serie geométrica. En este caso se observa que ambas series de Fourier convergen muy rápido a la función f(t) y pasados los 50 coeficientes, en la grafica ya no se notan los cambios ya que esta muy aproximada a la función real, los últimos puntos en formarse en la grafica son los que están mas próximos al cero en f(t) los cuales son unos pequeños picos que se forman entre una onda otra por ser periódica..

Con respecto a la función delta de Dirac se encontró que las funciones que se usan para representarla tienen en común que entre mas pequeño sea el intervalo T mas grande es el pico de la grafica, el pulso de gauss tiene una ventaja y es que se puede evaluar para cualquier valor de t, mientras que la función triangular solo esta definida entre el intervalo de –T a T. Así finalmente lo que se observa es que mientras la función delta de Dirac crece en la altura, decrece en el ancho de la misma, lo cual explica que el área bajo la curva de esta función sea siempre una constante de valor 1.

BIBLIOGRAFÍA

Análisis de Fourier
Hwei P. Hsu
Editorial Pearson Educación
1° Ed. 1973
México 1998

http://docentes.uacj.mx/gtapia/MateAvanz/Contenido/Unidad%20I/SERIE%20COMPLEJA.htm
Ignacio Holgado Mazariegos
Universidad Autónoma de ciudad Juárez
Instituto de Ingeniería y Tecnología

http://es.wikipedia.org/wiki/Delta_de_Dirac